

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO – USP  
ESCOLA DE ENGENHARIA DE LORENA

LUCAS PEREIRA FRANCISCO

**Aplicações de relatividade numérica em sistemas em  
colapso gravitacional**

Lorena – SP

2021



LUCAS PEREIRA FRANCISCO

**Aplicações de relatividade numérica em sistemas em  
colapso gravitacional**

Trabalho de conclusão de curso apresentado à Escola de Engenharia de Lorena – Universidade de São Paulo como requisito parcial para conclusão da Graduação do curso de Engenharia Física.

Orientadora: Prof.<sup>a</sup> Dr.<sup>a</sup> Bertha Cuadros-Melgar.

Lorena – SP

Dezembro de 2021

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE

Ficha catalográfica elaborada pelo Sistema Automatizado  
da Escola de Engenharia de Lorena,  
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Francisco, Lucas

Aplicações de Relatividade Numérica em sistemas em colapso gravitacional / Lucas Francisco; orientadora Bertha Cuadros-Melgar. - Lorena, 2021.  
51 p.

Monografia apresentada como requisito parcial para a conclusão de Graduação do Curso de Engenharia Física - Escola de Engenharia de Lorena da Universidade de São Paulo. 2021

1. Colapso gravitacional. 2. Constante cosmológica. 3. Buracos negros. 4. Singularidade. I. Título. II. Cuadros-Melgar, Bertha, orient.

# Agradecimentos

Gostaria de agradecer primeiramente aos meus pais, por todo o suporte durante esses anos de faculdade. Com certeza, esse trabalho e outros que estão por vir, não seriam possíveis sem eles.

Agradeço também a minha orientadora, a Profa. Dra. Bertha Cuadros-Melgar, não só pelo suporte no desenvolvimento dessa pesquisa, mas também pelos últimos dois anos que passamos trabalhando juntos, um período que foi fundamental no meu desenvolvimento acadêmico.

Também gostaria de mencionar e agradecer ao Leonardo Werneck, pelo tempo dedicado à explicação do programa SFCollapse1D, e pela atenção dada, sempre esclarecendo nossas dúvidas. Agradeço também aos membros do grupo de relatividade numérica do Prof. Élcio Abdalla pela oportunidade de me desenvolver academicamente através desses estudos.

Por último, mas não menos importante, à minha amiga e colega de pesquisa Amanda, sem a qual eu provavelmente nem conheceria a professora Bertha. Ela tem sido uma parte importante desses trabalhos, não só me ajudando no desenvolvimento dos diferentes programas computacionais, mas também sendo uma ótima Amiga que sempre esteve presente nos momentos em que eu precisei.



*"O homem isolado não desenvolve  
nenhum poder intelectual.  
É necessário para ele  
estar imerso em um ambiente  
criado por outros homens,  
cujas técnicas ele absorverá  
pelos primeiros 20 anos da sua vida.  
Ele então, poderá fazer um pouco  
de pesquisa por conta própria  
e fazer algumas poucas descobertas  
que serão passadas para os demais.  
Por esse ponto de vista,  
a busca por novas técnicas  
deveria ser considerada  
como um produto da comunidade humana  
como um todo,  
ao invés do produto de indivíduos."*

Alan Turing.



# Resumo

FRANCISCO, L. P. **Aplicações de relatividade numérica em sistemas em colapso gravitacional.** 2021. 51 p. Monografia (Trabalho de Graduação de Engenharia Física) – Escola de Engenharia de Lorena, Universidade de São Paulo, Lorena, 2021.

Nesse trabalho estudamos o fenômeno crítico no colapso gravitacional de campos escalares sem massa. Realizamos implementações em um programa C++ construído anteriormente para a aplicação do formalismo ADM na determinação das condições de colapso gravitacional para um Ansatz com simetria esférica. Essas implementações permitem a generalização das equações usadas no programa, possibilitando a análise desses mesmos sistemas na presença de uma constante cosmológica. Validamos essas implementações, com base em trabalhos anteriores, e calculamos algumas propriedades do fenômeno crítico na presença da constante cosmológica, analisando algumas das influências causadas pela sua presença no colapso gravitacional de campos escalares.

**Palavras-chave:** Colapso gravitacional. Constante cosmológica. Buracos negros. Singularidade.



# Abstract

FRANCISCO, L. P. **Applications of Numerical Relativity to systems in gravitational collapse**. 2021. 51 p. Monograph (Undergraduate Thesis in Engineering Physics) – Engineering School of Lorena, University of São Paulo, Lorena, 2021.

In this work we study the gravitational collapse of massless scalar fields. We modify a pre-existing C++ program previously build to apply the ADM formalism to the determination of the conditions to trigger gravitational collapse from an Ansatz with spherical symmetry. These modifications allow a generalization of the equations that are used in the program. This makes possible the analysis of these systems in the presence of a cosmological constant. We validate our implementation using previous works and calculate some properties of the critical phenomena in the presence of a cosmological constant, analyzing some aspects of its influence on the gravitational collapse of scalar fields.

**Keywords:** Gravitational collapse. Cosmological constant. Black holes. Singularity.



# Sumário

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>13</b>
<b>2</b>	<b>REVISÃO TEÓRICA</b>	<b>15</b>
<b>2.1</b>	<b>A teoria da Relatividade Geral</b>	<b>15</b>
2.1.1	O espaço-tempo	15
2.1.2	O tensor métrico	17
2.1.3	Derivadas covariantes	18
2.1.4	Curvatura	19
2.1.5	Energia e matéria	20
2.1.6	As equações de Einstein	20
2.1.7	A constante cosmológica	21
<b>2.2</b>	<b>O formalismo 3+1</b>	<b>22</b>
2.2.1	A decomposição 3+1 do espaço-tempo	23
2.2.2	Curvatura Extrínseca	24
2.2.3	As equações ADM	25
2.2.3.1	As equações de Restrição	26
2.2.3.2	As equações de evolução	27
2.2.3.3	A escolha de um sistema de coordenadas	29
<b>2.3</b>	<b>Sistemas em colapso gravitacional</b>	<b>31</b>
2.3.1	Campos escalares	33
<b>2.4</b>	<b>Métodos numéricos para solução de equações diferenciais</b>	<b>34</b>
<b>3</b>	<b>RESULTADOS</b>	<b>37</b>
<b>3.1</b>	<b>SFCollapse1D</b>	<b>37</b>
<b>3.2</b>	<b>Fenômeno Crítico de Campos Escalares no Espaço Plano</b>	<b>39</b>
<b>3.3</b>	<b>Colapso de campos escalares na presença de uma constante cosmológica</b>	<b>42</b>
<b>3.4</b>	<b>Fenômeno crítico de campos escalares no espaço AdS</b>	<b>42</b>
3.4.1	AdS com $\Lambda = -0,001$	42
3.4.2	AdS com $\Lambda = -0,01$	44
<b>3.5</b>	<b>Análise dos resultados</b>	<b>45</b>
<b>4</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>47</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>49</b>



# 1 Introdução

A teoria da relatividade geral foi proposta por Albert Einstein para permitir que as leis e simetrias observadas na teoria da relatividade especial fossem aplicáveis quando se leva em consideração a presença de campos gravitacionais. A principal diferença entre as duas teorias está no fato da teoria da relatividade especial assumir a existência de um observador inercial universal, enquanto a relatividade geral, ao assumir que observadores iniciais são somente locais ([ALCUBIERRE, 2008](#)), permite deduzir que objetos livres de forças externas não se movem em caminhos necessariamente retilíneos pelo espaço-tempo, mas seguem caminhos geodésicos que definem, entre outros, as órbitas dos astros. No espaço-tempo as geodésicas são as curvas de comprimento extremal, o que sugere que o espaço-tempo não é plano mas sim curvo. De certa forma, a curvatura do espaço-tempo se manifesta com o que conhecemos como gravidade ([TAYLOR; WHEELER, 2000](#)). A teoria geral da relatividade descreve como o espaço-tempo se deforma na presença de matéria e energia através das chamadas equações de Einstein. O movimento dos corpos pode então ser determinado, uma vez que se conhece a estrutura do espaço-tempo (tensor métrico), através de um outro conjunto de equações conhecidas como equações geodésicas. Juntas estas equações permitem uma descrição geral de como intervalos de tempo e comprimentos percorridos por diferentes corpos são percebidos por diferentes observadores, como partículas com ou sem massa se movem, e como a presença de matéria e energia afeta a estrutura do espaço-tempo.

Mesmo que as equações de Einstein sejam suficientes para determinar a forma do espaço-tempo para uma dada distribuição de matéria, poucas soluções exatas para elas são conhecidas. O conjunto de equações diferenciais parciais não lineares que compõe essa teoria é de difícil solução. Muitas vezes a única alternativa é fazer aproximações em sistemas de alta simetria ou usar métodos numéricos para obter soluções numéricas aproximadas. Um dos sistemas de interesse onde o uso de soluções numéricas é necessário são os sistemas em colapso gravitacional, que lidam com situações onde uma distribuição de matéria pode evoluir ao ponto de formar ou não um buraco negro; e se há a formação, quais as propriedades desse buraco negro e as características desse processo.

O fenômeno de colapso gravitacional possui diversos aspectos interessantes, não só pelo entendimento a respeito do limiar de formação do buraco negro, mas também, como foi mostrado inicialmente nos trabalhos de Mattew Choptuik ([CHOPTUIK, 1993](#)), esse fenômeno apresenta propriedades universais que são análogas àquelas presentes nas mais diversas formas de transição de fases. Dessa forma, o entendimento dessas propriedades pode demonstrar aplicações não só na astronomia e cosmologia a partir de um entendimento das propriedades da matéria e seu comportamento, mas também em outras áreas através

da correspondência AdS/CFT ([ARSIWALLA et al., 2011](#)).

Nesse trabalho, estudamos o fenômeno crítico no colapso de campos escalares na presença de uma constante cosmológica. Para fazer isso, realizamos modificações no programa SFCollapse1D, desenvolvido para análise do fenômeno de colapso. No capítulo a seguir faremos uma revisão dos conceitos teóricos necessários para a compreensão desse fenômeno, assim como uma descrição dos métodos numéricos usados nas simulações realizadas com o programa SFCollapse1D. No capítulo 3 descrevemos as modificações realizadas no programa, e mostramos os resultados obtidos em duas situações distintas de constante cosmológica. Finalmente no capítulo 4 expomos as nossas conclusões e problemas em aberto que podem ser estudados com este mesmo programa.

## 2 Revisão teórica

### 2.1 A teoria da Relatividade Geral

#### 2.1.1 O espaço-tempo

A teoria da Relatividade Geral não é uma apenas uma teoria da dinâmica de objetos no espaço-tempo, mas é também uma teoria que incorpora em sua descrição as características da geometria do próprio espaço-tempo e como este é afetado pela presença de matéria. A presença de matéria e energia ocasiona a curvatura do espaço-tempo, e tal noção de curvatura precisa ser descrita intrinsecamente, como veremos na seção 2.1.4, sem recorrer às propriedades de um espaço maior a partir do qual podemos observar o espaço-tempo se curvando.

Uma descrição intrínseca da curvatura de um espaço pode ser feita observando-se o comportamento de trajetórias nesse próprio espaço. Comentaremos mais detalhadamente sobre isso na seção 2.1.4, mas podemos adiantar que o comportamento das trajetórias ao percorrer a estrutura que define o espaço-tempo é o mecanismo usado para inferir sua geometria e curvatura.

As trajetórias que descrevem a linha de mundo<sup>1</sup> de um objeto são descritas por curvas, e tais curvas precisam ser contínuas. Para descrever o espaço-tempo e suas propriedades, é necessário fazer uso de uma estrutura matemática capaz de abrigar curvas contínuas, e permitir a definição de operações capazes de analisar as propriedades dessas curvas.

A estrutura matemática mais simples que detém essas propriedades é a variedade. Uma variedade é uma generalização do espaço  $\mathbb{R}^n$ , trata-se de um espaço topológico<sup>2</sup>, que localmente pode ser confundido com  $\mathbb{R}^n$  (rígorosamente, diríamos que existe um homeomorfismo<sup>3</sup> local entre a variedade  $\mathcal{M}$  e o espaço  $\mathbb{R}^n$ ). Essa correspondência local com  $\mathbb{R}^n$ , pode ser melhor visualizada na figura 1.

No espaço-tempo, corpos não possuem só trajetórias, possuem também velocidades. Impomos, então, uma restrição a mais na variedade que define o espaço-tempo, esta precisa ser diferenciável. Uma vez que o conceito de diferenciabilidade em princípio está definido para funções  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , é preciso que este seja generalizado para variedades, isso pode ser feito garantindo que os mapas de transição das diferentes cartas sejam diferenciáveis,

---

<sup>1</sup> O conjunto de todos os eventos na história de um objeto no espaço-tempo.

<sup>2</sup> Um espaço topológico é a estrutura matemática mais simples necessária para a definição de continuidade. Uma descrição mais clara pode ser encontrada em (MUNKRES, 2014).

<sup>3</sup> Um homeomorfismo é um mapeamento entre dois conjuntos que preserva sua estrutura topológica (MUNKRES, 2014).

Fonte: Adaptado de ([LEE, 2013](#))

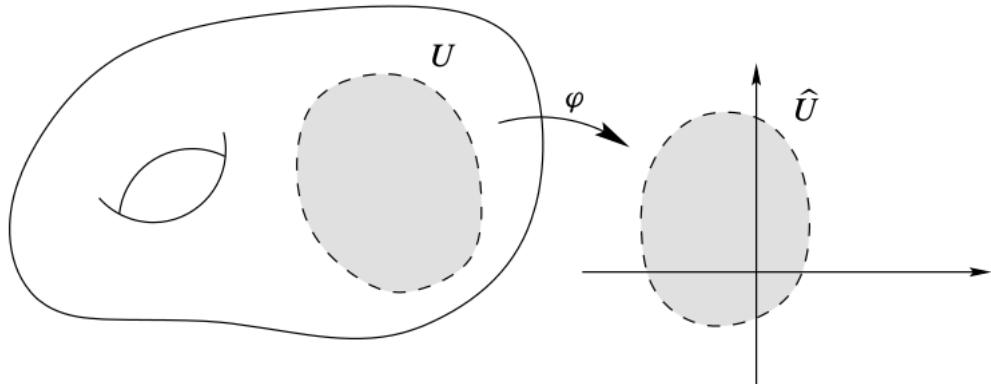


Figura 1 – Sendo  $U$  um subconjunto de uma variedade, existe um mapeamento  $\varphi$ , que denominamos uma carta, estabelecendo uma correspondência entre a variedade e o espaço  $\mathbb{R}^n$ .

uma vez que esses serão funções do tipo  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  ([LEE, 2013](#)).

Dado um ponto de uma variedade diferenciável, por ele passam infinitas curvas, cada uma delas, se diferenciável, dá origem a um vetor tangente, que representa o vetor velocidade dessa curva. Todos os vetores que existem, tangentes à variedade em um ponto  $p$  dão origem a um espaço tangente, denominado  $T_p M$ , que ilustramos na figura 2.

Fonte: Adaptado de ([LEE, 2013](#))

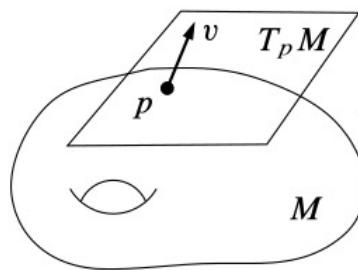


Figura 2 – Dada uma variedade  $M$ , em um ponto  $p$  passam infinitas curvas, a cada uma delas podemos associar um vetor tangente  $v$ . O conjunto de todos os vetores tangentes formam um espaço vetorial, que denominamos  $T_p M$ .

A estrutura de espaço-vetorial presente nos diferentes espaços tangentes permite a definição de operações, através dos tensores, que permitem analisar a geometria da variedade.

Na teoria geral da relatividade, assumimos que o espaço tempo pode ser modelado por uma variedade diferenciável pseudo-riemanniana  $\mathcal{M}$  de 4 dimensões, *i.e.*, um espaço

topológico localmente homeomórfico a  $\mathbb{R}^4$ <sup>4</sup>. Em cada ponto  $p$  de  $\mathcal{M}$  surge naturalmente um espaço vetorial tangente  $T_p M$  e seu dual  $T_p^* M$ . A existência de um espaço vetorial em cada ponto permite assumir que há sobre  $\mathcal{M}$  um campo vetorial (MISNER; THORNE; WHEELER, 1970).

Um tensor do tipo  $(m, n)$  é um mapa multilinear  $\mathcal{T} : T_p^* M \times \dots \times T_p^* M \times T_p M \dots \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ , onde o produto cartesiano é realizado  $m$  vezes em  $T_p^* M$  e  $n$  vezes em  $T_p M$ , *i.e.*, um tensor é um mapeamento que associa  $m$  elementos de  $T_p^* M$  e  $n$  elementos de  $T_p M$  a um número real. Dizemos que a ordem do tensor é  $m + n$ . Havendo sobre  $\mathcal{M}$  um campo vetorial, há portanto, também um campo tensorial construído segundo o produto cartesiano mencionado. Esse campo permite definir um tensor em cada ponto de  $\mathcal{M}$  (RENTELN, 2014).

As equações da relatividade geral são escritas a partir de grandezas tensoriais. Isso garante que as equações satisfaçam a propriedade de covariância geral, *i.e.*, as equações mantém a sua forma mediante uma transformação arbitrária de coordenadas.

### 2.1.2 O tensor métrico

Um tensor de muita importância é o tensor métrico, de tipo  $(0, 2)$ , que define o produto interno entre dois vetores no espaço tangente em um determinado ponto. Dados dois vetores, temos que  $\mathbf{g}(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ , para  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in T_p M$ . O produto interno também permite determinar a norma de um vetor, e é o fato deste produto interno não ser estritamente positivo (o que define uma variedade pseudo-riemanniana em contraposição a uma variedade riemanniana) que permite a distinção entre vetores nulos, tipo tempo e tipo espaço.

Tratando-se de um tensor de ordem 2, as componentes do tensor métrico podem ser expressas como uma matriz quadrada  $4 \times 4$ :

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

Um deslocamento infinitesimal  $ds$  no espaço-tempo pode ser representado por um vetor infinitesimalmente pequeno, cuja norma é então:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.2)$$

---

<sup>4</sup> Usamos aqui  $\mathbb{R}^4$  para expressar o produto cartesiano  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$  ou seja um conjunto de 4 números que representam as coordenadas  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$ . Mas não se trata do espaço euclidiano tradicional, e sim do espaço de Minkowski.

A equação 2.2, por abuso de nomenclatura, é muitas chamada de métrica do espaço-tempo, uma vez que é a medida de distância infinitesimal, específica para aquela geometria espaço-temporal. Além de uma noção de distância, o conceito de volume está intimamente ligado ao tensor métrico, em especial pela relação (SCHUTZ, 2010)  $\frac{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}{\partial(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)} = \sqrt{-g}$ , onde o lado esquerdo da igualdade é o jacobiano de uma transformação de coordenadas de um sistema  $O$  para um sistema de coordenadas  $O'$ , e  $g$  é o determinante de 2.1. A partir dessa relação o tensor métrico pode ser usado para calcular volumes no espaço-tempo, *i.e.*, o diferencial de volume em um sistema com coordenadas  $x^\mu$  é igual a  $\sqrt{-g} dx^4$ .

### 2.1.3 Derivadas covariantes

A métrica também possui grande importância na definição de curvatura através da conexão afim. Uma conexão afim é um objeto geométrico que conecta os diferentes espaços tangentes. Existem várias conexões possíveis para se escolher, mas por simplicidade e sem perda de generalidade escolhe-se aquela que é livre de torção<sup>5</sup>, essa conexão é conhecida como conexão de Levi-Civita. As componentes da conexão de Levi-Civita são expressas pelos símbolos de Christoffel  $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$  e se relacionam ao tensor métrico pela equação<sup>6</sup>:

$$\Gamma_{\mu\nu}^\lambda = \frac{1}{2} g^{\sigma\lambda} (g_{\sigma\mu;\nu} + g_{\sigma\nu;\mu} - g_{\mu\nu;\sigma}). \quad (2.3)$$

Ao se derivar grandezas tensoriais, uma correção precisa ser aplicada para garantir que o objeto resultante seja covariante, *i.e.*, transforma-se como um tensor. Essa correção é dada pelos símbolos de Christoffel. Ao se incorporar essa correção à derivada de uma grandeza tensorial chamamos o objeto resultante de derivada covariante desse tensor. Dado um vetor  $V$  e um 1-forma  $\omega$ <sup>7</sup> as suas respectivas derivadas covariantes são:

$$\nabla_\lambda V^\mu = \partial_\lambda V^\mu + \Gamma_{\lambda\nu}^\mu V^\nu. \quad (2.4)$$

$$\nabla_\lambda \omega_\mu = \partial_\lambda \omega_\mu - \Gamma_{\lambda\mu}^\nu \omega_\nu. \quad (2.5)$$

A partir desses resultados, pode-se mostrar que para um tensor genérico do tipo  $(m, n)$  a sua derivada covariante é obtida somando um símbolo de Christoffel para cada índice contravariante e subtraindo para cada índice covariante. Como exemplo, consideremos um tensor  $\mathcal{T}_{\beta\mu}^\alpha$ , assim teríamos:

$$\nabla_\lambda \mathcal{T}_{\beta\mu}^\alpha = \partial_\lambda \mathcal{T}_{\beta\mu}^\alpha + \Gamma_{\lambda\kappa}^\alpha \mathcal{T}_{\beta\mu}^\kappa - \Gamma_{\lambda\beta}^\kappa \mathcal{T}_{\kappa\mu}^\alpha - \Gamma_{\lambda\mu}^\kappa \mathcal{T}_{\beta\kappa}^\alpha.$$

<sup>5</sup> Torção é uma forma matemática de se descrever como um espaço tangente rotaciona ao longo de um caminho. Então escolhemos aquela conexão que não apresenta tal rotação .

<sup>6</sup> O símbolo ; denota derivada covariante em relação à coordenada que procede esse símbolo.

<sup>7</sup> Respectivamente tensores de tipo  $(1, 0)$  e  $(0, 1)$ .

A inserção da correção dada pelos símbolos de Christoffel pode ser interpretada como uma correção necessária para se levar em consideração a variação da base do espaço tangente em uma variedade arbitrária.

### 2.1.4 Curvatura

Dizemos que um objeto possui curvatura intrínseca se caminhos anteriormente paralelos, deixam de ser paralelos ao se percorrer a superfície desse objeto. A partir dessa definição intuitiva podemos inferir que a superfície de um cilindro não é curvada mas a de uma esfera possui curvatura.<sup>8</sup>

Esse conceito pode ser formalizado matematicamente através da definição do tensor de curvatura de Riemann.

$$R^\sigma_{\alpha\mu\nu} = [\nabla_\mu, \nabla_\nu]. \quad (2.6)$$

que nos dá uma medida da não comutatividade das derivadas covariantes em duas coordenadas distintas. Esse tensor pode ser calculado mais facilmente em termos dos símbolos de Christoffel, assumindo a forma:

$$R^\sigma_{\alpha\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\sigma_{\nu\alpha} - \partial_\nu \Gamma^\sigma_{\mu\alpha} + \Gamma^\sigma_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\alpha} - \Gamma^\sigma_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\alpha}. \quad (2.7)$$

Dada uma variedade Riemanniana (ou pseudo-riemanniana) o tensor de Riemann nos indica a mudança que ocorre nas componentes de um tensor quando ele é transportado paralelamente em um caminho fechado. Se essa mudança for nula, dizemos que essa variedade não possui curvatura intrínseca.

Em um espaço de quatro dimensões, o tensor de Riemann teria 256 componentes<sup>9</sup>, entretanto essas componentes não são todas independentes. O tensor de Riemann apresenta um determinado número de simetrias que reduz substancialmente a quantidade de componentes independentes. Por construção o tensor de Riemann é antisimétrico na troca de seus dois últimos índices, além disso apresenta outras simetrias que são impostas pela conexão afim. Dentre essas simetrias temos que o tensor também será antissimétrico na troca dos dois primeiros índices e invariante mediante a troca do primeiro par com o segundo par de índices. Além disso a seguinte equação, conhecida como identidade de Bianchi, é verdadeira<sup>10</sup>(CARROLL, 2003):

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} + R_{\rho\mu\nu\sigma} + R_{\rho\nu\sigma\mu} = 0. \quad (2.8)$$

<sup>8</sup> Basta considerar por exemplo que dois meridianos (sempre ortogonais ao equador e portanto paralelos) sempre se encontram nos polos da esfera.

<sup>9</sup> Teríamos  $4^4$  componentes distintas possíveis.

<sup>10</sup> Aqui o índice do tensor foi abaixado com o uso do tensor métrico  $R_{\rho\sigma\mu\nu} = g_{\rho\alpha} R^\alpha_{\sigma\mu\nu}$ .

Levando em conta todas as simetrias impostas, restam apenas 20 componentes independentes. Ou seja, 20 funções que precisam ser especificadas para se determinar a curvatura de uma variedade em cada ponto.

Embora possa ser vastamente simplificado pelas suas várias simetrias, o tensor de Riemann ainda é um objeto difícil de se trabalhar. Um tensor mais simples de tratar e que ainda contém informação suficiente a respeito da curvatura do espaço tempo<sup>11</sup>, oferecendo uma descrição de como um diferencial de volume varia em cada direção do espaço-tempo é o tensor de Ricci. Ele é obtido a partir do tensor de Riemann pela operação de contração entre o primeiro e o terceiro índice desse tensor.

$$R_{\beta\alpha} = R^\mu_{\alpha\mu\beta} . \quad (2.9)$$

Podemos definir ainda o escalar de Ricci, que fornece uma medida da curvatura média da variedade:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} . \quad (2.10)$$

Em posse do tensor de Riemann, de Ricci, do tensor métrico e do escalar de Ricci podemos agora introduzir as equações de Einstein.

### 2.1.5 Energia e matéria

Na teoria geral da relatividade, a curvatura do espaço-tempo (quantificada nas equações de Einstein pelo tensor e escalar de Ricci) é ocasionada pela presença de matéria e energia. No espaço-tempo quadridimensional, a distribuição de matéria e energia pode ser representada pelo tensor de energia-momento  $T^{\mu\nu}$ . Onde  $T^{00}$  corresponde a densidade de energia,  $T^{j0}$  ao fluxo de energia,  $T^{jj}$  (para  $j \neq 0$ ) à pressão e os demais termos à tensão (MISNER; THORNE; WHEELER, 1970).

### 2.1.6 As equações de Einstein

Como em muitas as outras áreas da física, as equações dinâmicas podem ser obtidas a partir do cálculo variacional. Considerando-se uma ação que contém as variáveis escalares de interesse do sistema, o ponto estacionário dessa ação será aquele que descreve as equações dinâmicas do sistema. Na Relatividade Geral essa ação é conhecida como ação de Einstein-Hilbert e possui sempre duas componentes.  $S = S_G + S_M$  com  $S_G$  sendo a parte que descreve a gravitação e  $S_M$ , os campos de matéria. Essa ação assume então a forma:

$$S = \frac{1}{16\pi} \int \sqrt{-g} R d^4x + \int \mathcal{L}(\phi) \sqrt{-g} d^4x , \quad (2.11)$$

<sup>11</sup> Sendo dado pela contração do tensor de Riemann e sendo ainda um tensor simétrico, o tensor de Ricci tem somente 10 componentes independentes.

onde o primeiro termo contém a informação pertinente às derivadas do tensor métrico (contidas no escalar de Ricci) e o segundo termo expressa a densidade lagrangiana de matéria no espaço-tempo, e  $\mathcal{L}(\phi)$  é uma função do tipo de matéria. Considerando o tensor métrico como variável dinâmica, esse funcional  $S[g^{\mu\nu}]$  encontra seu ponto estacionário quando a seguinte equação é satisfeita:

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R = 8\pi T^{\mu\nu} . \quad (2.12)$$

A equação 2.12 é uma notação compacta para 10 equações diferenciais distintas, relacionando o tensor de curvatura de Ricci ( $R^{\mu\nu}$ ), o tensor métrico ( $g^{\mu\nu}$ ), o escalar de Ricci ( $R$ ) e o tensor de energia-momento ( $T^{\mu\nu}$ ). Juntas essas equações são conhecidas como equações de Einstein e definem como o tensor métrico pode ser determinado a partir de uma distribuição de matéria (tensor energia-momento).

### 2.1.7 A constante cosmológica

Logo após completar o desenvolvimento da teoria da Relatividade Geral, Albert Einstein tentou aplicar as suas recém obtidas equações para modelar todo o universo. Entretanto, o resultado obtido entrava em contradição direta com a crença filosófica vigente na época de que o universo era estático e eterno (WEINBERG, 1989). A aplicação direta da equação 2.12 revela um universo dinâmico, não constante, um resultado que Einstein não podia aceitar. Dessa forma, ele buscou formas de modificar as equações para que não fosse necessário abandonar a hipótese do universo estático. A forma menos drástica de se alterar as equações para que uma solução estática fosse possível era com a introdução, no lado esquerdo da equação de um termo proporcional ao tensor métrico. As equações de Einstein com constante cosmológica assumem a forma (MISNER; THORNE; WHEELER, 1970):

$$R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}R + \Lambda g^{\mu\nu} = 8\pi T^{\mu\nu} .$$

Esse novo conjunto de equações admitia uma solução estática, entretanto, alguns anos depois com as observações de Hubble referentes a expansão do universo, Einstein abandonou a constante cosmológica, retornando a sua formulação original para as equações que levam o seu nome.

No contexto moderno da física teórica e da cosmologia, a constante cosmológica ressurge, sendo reinterpretada como a energia presente no vácuo, associada a uma componente do tensor de energia oriunda da polarização do vácuo, derivada da teoria quântica de campos (SAHNI; KRASÍNSKI, 2008).

A presença de uma constante cosmológica, que atua de certo modo como uma componente do tensor de energia-momento, vai afetar a estrutura geométrica do espaço-

tempo. Se considerarmos que as outras fontes de energia (o tensor de energia-momento  $T^{\mu\nu}$ ) são nulas, obtemos como solução das equações de Einstein um espaço-tempo com curvatura constante. Se  $\Lambda > 0$  teremos um espaço de curvatura constante positiva, chamado de espaço de Sitter (dS). Por outro lado,  $\Lambda < 0$  vai dar origem a um espaço-tempo de curvatura constante negativa chamado de espaço Anti-De Sitter (AdS). Na presença de outras fontes de matéria, *i.e.*,  $T^{\mu\nu} \neq 0$ , como o que acontece quando temos um buraco negro ou uma nuvem de matéria em determinada região do espaço, as soluções das equações de Einstein darão origem a uma geometria mais complexa para o espaço-tempo, entretanto podemos dizer que suficientemente longe das fontes de matéria recuperamos as soluções dS ou AdS (dependendo do valor atribuído à constante cosmológica). Nesse caso, nos referimos às soluções como assintoticamente dS ou AdS ([CALVO; GARRIGA, 2018](#)).

No que se refere ao colapso gravitacional, a sua relação com a constante cosmológica é um campo de estudo ainda em desenvolvimento. Resultados como os de ([ZHANG et al., 2016](#)) sugerem que o limiar de formação de um buraco negro tende a crescer com o aumento da constante cosmológica em um espaço de Sitter, entretanto diferentes cenários com diferentes fontes de matéria, e como estas são influenciadas pela presença do termo cosmológico ainda precisam ser melhor investigados.

## 2.2 O formalismo 3+1

As equações de campo de Einstein não fazem distinção entre tempo e espaço. Entretanto, é conveniente que se possa escrever as equações como variáveis espaciais evoluindo no tempo, permitindo assim tratar o problema como um problema de Cauchy, ou problema de valor inicial, onde podemos especificar as configurações do espaço-tempo em um instante inicial e usar os métodos numéricos tradicionais para resolução de equações diferenciais para então determinar como as variáveis de interesse evolvem no tempo. Existe mais de uma forma de se fazer essa separação de espaço e tempo ([ALCUBIERRE, 2008](#)). Aqui optamos pelo uso do formalismo ADM, um dos mais tradicionais no campo de relatividade numérica.

O formalismo ADM ([ARNOWITT; DESER; MISNER, 2008](#)) é um formalismo Hamiltoniano para a relatividade geral, que foi desenvolvido inicialmente com o propósito de enfatizar o aspecto de campo em vez do aspecto geométrico das equações de Einstein, permitindo tratar a dinâmica do campo gravitacional de forma a possibilitar uma quantização ([STANLEY DESER, 2008](#)). Entretanto encontrou diversas aplicações, incluindo no campo de relatividade numérica.

As aplicações do formalismo ADM em relatividade numérica vem de uma natural decomposição (3+1) necessária para a formulação Hamiltoniana, que trabalha com coordenadas generalizadas e momentos generalizados em um certo instante de tempo  $t$ .

Apresentamos aqui uma revisão do formalismo ADM, focada em suas aplicações em relatividade numérica.

### 2.2.1 A decomposição 3+1 do espaço-tempo

Seja  $(\mathcal{M}, g)$  uma variedade pseudo-Riemanniana equipada com uma métrica  $g$ . Assumimos que existe um difeomorfismo<sup>12</sup> entre  $\mathcal{M}$  e  $\mathbb{R} \times \Sigma$ <sup>13</sup>, onde  $\Sigma$  é um conjunto de hipersuperfícies de Cauchy<sup>14</sup>. Efetivamente, estamos pensando no espaço-tempo como composto por diversas "fatias", onde cada uma delas é uma superfície de Cauchy, dada por uma superfície de nível de uma função escalar  $t$ , interpretada aqui como uma medida universal de tempo<sup>15</sup>. O fatiamento é feito de tal forma que todas as hipersuperfícies  $\Sigma$  são do tipo espaço<sup>16</sup>, dessa forma o vetor normal à hipersuperfície  $n^a$  é do tipo tempo, como ilustra a figura 3.

Fonte: Adaptado de ([BAUMGARTE; SHAPIRO, 2010](#))

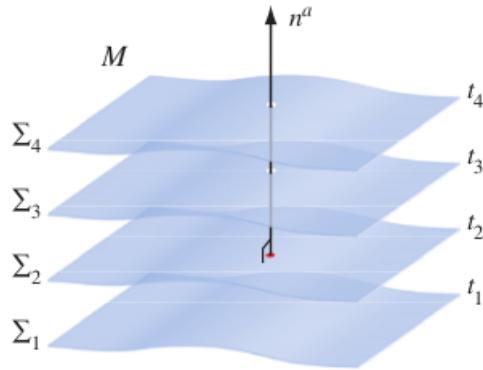


Figura 3 – Fatiamento do espaço-tempo (variedade  $\mathcal{M}$ ) em hipersuperfícies tipo-espaço  $\Sigma$ .  $n^a$  é um vetor futuro tipo tempo.

Consideremos o *1-forma*  $\nabla t$ , associado às superfícies de nível da função  $t$ . Sua norma calculada através do tensor métrico é:

$$g^{\mu\nu}\nabla_\mu t \nabla_\nu t = -\frac{1}{\alpha^2}, \quad (2.13)$$

onde  $\alpha$  é chamado de função lapso, uma medida da quantidade de tempo próprio entre duas hipersuperfícies. Em termos da função lapso, o vetor normal à hipersuperfície pode

<sup>12</sup> Um difeomorfismo é uma relação de equivalência entre duas variedades diferenciáveis.

<sup>13</sup> A existência desse difeomorfismo pode sempre ser assumida se  $\mathcal{M}$  é uma variedade globalmente hiperbólica ([BERNAL; SANCHEZ, 2003](#)).

<sup>14</sup> Uma superfície de Cauchy é o conjunto de pontos do espaço em um instante de tempo fixo  $t$ .

<sup>15</sup> Esse tempo não é o tempo próprio medido por nenhum observador físico. É o tempo de um observador teórico movendo-se ortogonalmente à hipersuperficie, conhecido como observador euleriano ([ALCUBIERRE, 2008](#)).

<sup>16</sup> Isso significa que a assinatura da métrica definida sobre essa superfície é  $(+, +, +)$  ([DANIELI, 2018](#)).

ser escrito como:

$$n^a = -\alpha \nabla^a t . \quad (2.14)$$

O vetor unitário normal à hipersuperfície, permite definir o operador de projeção:

$$P_\nu^\mu = \delta_\nu^\mu + n^\mu n_\nu . \quad (2.15)$$

Esse operador projeção permite projetar os tensores do espaço-tempo nas superfícies espaciais. Aplicando esse operador na métrica  $g$  obtemos a métrica espacial:

$$\begin{aligned} P_\mu^\alpha P_\nu^\beta g_{\alpha\beta} &= (\delta_\mu^\alpha + n^\alpha n_\mu)(\delta_\nu^\beta + n^\beta n_\nu)g_{\alpha\beta} \\ &= (\delta_\mu^\alpha \delta_\nu^\beta + \delta_\mu^\alpha n^\beta n_\nu + n^\alpha n_\mu \delta_\nu^\beta + n^\alpha n_\mu n^\beta n_\nu)g_{\alpha\beta} \\ &= g_{\mu\nu} + g_{\mu\alpha} n^\alpha n_\nu + n^\alpha n_\mu g_{\alpha\nu} + n_\alpha n_\mu n^\alpha n_\nu \\ &= g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu + n_\nu n_\mu - n_\mu n_\nu \\ &= g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu \end{aligned}$$

Definimos então a métrica espacial:

$$\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu . \quad (2.16)$$

Trata-se de um objeto puramente espacial que reside completamente na hipersuperfície  $\Sigma$ .

### 2.2.2 Curvatura Extrínseca

Anteriormente discutimos sobre como a superfície de um cilindro não possui curvatura intrínseca. Isso porque ao se transportar paralelamente vetores sobre a superfície de um cilindro estes não mudam sua orientação relativa, diferentemente do que ocorre na superfície de uma esfera. Assim, dizemos que não há curvatura intrínseca no cilindro e o tensor de curvatura de Riemann é identicamente nulo. Entretanto é intuitivo de que diferentemente de um plano, um cilindro é uma superfície curva, essa curvatura só não é intrínseca da geometria do objeto (não seria percebida por observadores que habitam a superfície do cilindro) mas é um artefato de como a superfície do cilindro está imersa em um espaço de maior dimensionalidade. Geralmente essa curvatura não é importante para as equações de Einstein pois trabalhando-se com uma variedade de  $n$  dimensões, a curvatura extrínseca seria um artefato de como essa variedade está imersa em um espaço de dimensão  $n + 1$ .

Entretanto, quando fazemos a decomposição  $(3 + 1)$  das equações de Einstein, passamos a justamente analisar como um conjunto de hipersuperfícies tipo-espacômetro estão

imersas em um espaço-tempo. Nesse contexto a curvatura extrínseca das superfícies torna-se um atributo importante da decomposição (3 + 1).

A curvatura extrínseca pode ser definida como a projeção na superfície espacial da mudança do vetor normal à superfície quando este é paralelamente transportado.

Fonte: Adaptado de ([BAUMGARTE; SHAPIRO, 2010](#))

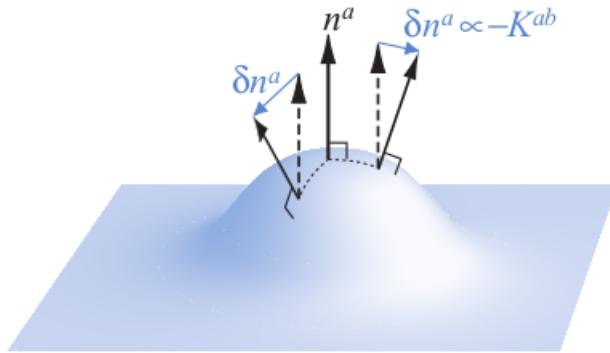


Figura 4 – Mudança na direção do vetor normal  $n^a$  ao longo da superfície. A projeção de  $\delta n^a$  sobre a superfície espacial nos dá a curvatura extrínseca.

Segundo essa definição, matematicamente podemos escrever ([ALCUBIERRE, 2008](#)):

$$K_{\mu\nu} = -P_\mu^\alpha \nabla_\alpha n_\nu . \quad (2.17)$$

O que deixa claro que o tensor  $K_{\mu\nu}$  é puramente espacial uma vez que é resultado da aplicação do operador de projeção. Equivalentemente a essa definição, podemos definir a curvatura extrínseca em termos da derivada de Lie<sup>17</sup> da métrica espacial:

$$K_{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \mathcal{L}_n \gamma_{\mu\nu} \quad (2.18)$$

### 2.2.3 As equações ADM

Até aqui, tudo que fizemos foi definir um conjunto de ferramentas que nos permitem descrever o comportamento de uma superfície espacial oriunda da decomposição do espaço-tempo. Vimos como o espaço-tempo decomposto pode ser entendido em termos de grandezas como a curvatura extrínseca, a métrica espacial e a função lapso. Entretanto, não especificamos quais propriedades cada uma dessas superfícies espaciais precisam satisfazer e como a evolução temporal destas superfícies se dá. Para isso precisamos das equações de Einstein.

<sup>17</sup> A derivada de Lie mede a variação de um campo tensorial ao longo de um campo vetorial, nesse caso tratamos da variação de  $\gamma_{ij}$  ao longo de  $n^a$ .

O primeiro passo é decompor os objetos presentes em 2.12 em suas componentes espaciais e temporais. Isso vai nos dar um conjunto de quatro equações que determinam as condições que as variáveis (curvatura extrínseca e métrica espacial) precisam satisfazer em cada superfície espacial, e como essas variáveis evoluem com um passo temporal. Formando assim, duas equações de restrição e duas equações de evolução.

### 2.2.3.1 As equações de Restrição

Começamos com a decomposição do tensor de Riemann. Devido às suas simetrias existem 3 possíveis projeções deste tensor que não são identicamente nulas. A projeção completa de  $R^{\mu}_{\nu\sigma\kappa}$ ; A projeção de  $R^{\mu}_{\nu\sigma\kappa}$  com um de seus índices projetados na direção normal e a projeção de  $R^{\mu}_{\nu\sigma\kappa}$  com dois dos seus índices projetados na direção normal (BAUMGARTE; SHAPIRO, 2010).

A relação da projeção totalmente espacial do tensor de curvatura de Riemann em 4 dimensões e da sua contraparte na hipersuperfície tridimensional precisa satisfazer a chamada equação de Gauss:

$$R_{abcd} + K_{ac}K_{bd} - K_{ad}K_{cb} = P_a^\mu P_b^\nu P_c^\sigma P_d^\kappa {}^{(4)}R_{\mu\nu\sigma\kappa}, \quad (2.19)$$

onde  $R_{abcd}$  é o tensor de curvatura tridimensional, na superfície espacial construído a partir de  $\gamma_{ab}$ . A contração de 2.19 com  $g^{ac}g^{bd}$  resulta em:

$$n^a n^b G_{ab} = {}^{(3)}R + K^2 - K_{ab} K^{ab}.$$

Substituindo  $G_{ab} = 8\pi T_{ab}$  e definindo  $\rho = n^a n^b T_{ab}$  obtemos finalmente uma das 4 equações que determinam o formalismo ADM, a chamada Restrição Hamiltoniana:

$$\boxed{\mathcal{H} = {}^{(3)}R + K^2 - K_{ab} K^{ab} - 16\pi\rho = 0} \quad (2.20)$$

A segunda projeção do tensor de Riemann de interesse, é aquela obtida ao se projetar um dos índices na direção normal.

$$P_a^p P_b^q P_c^r n^s {}^{(4)}R_{pqrs} = D_b K_{ac} - D_a K_{bc}. \quad (2.21)$$

Novamente, contraindo com  $g^{ad}g^{bd}$  obtemos a equação de Codazzi:

$$P^{ab} n^c G_{bc} = D_b (\gamma^{ab} K - K_{ab} K^{ab}). \quad (2.22)$$

onde  $D_i$  representa a derivada covariante espacial<sup>18</sup>, induzida pela métrica  $\gamma_{ab}$ . Definindo a densidade de momento como  $S_a = -\gamma_a^q n^s T_{qs}$  e substituindo o tensor de Einstein:

$$\mathcal{M}_a = D_b K_a^b - D_a K - 8\pi S_a = 0 . \quad (2.23)$$

A Equação 2.23 é a chamada equação de restrição do momento. Tanto 2.20 quanto 2.23 são equações que devem ser satisfeitas em cada instante de tempo, *i.e.*, em cada superfície espacial, respeitando assim as equações de Einstein. Elas representam as equações de restrição do formalismo ADM.

### 2.2.3.2 As equações de evolução

Vamos agora deduzir as equações que determinam os valores das variáveis de interesse no instante  $(t + \Delta t)$  conhecendo-se elas no instante  $t$ . Primeiramente, precisamos notar que com base na equação 2.14 o vetor normal  $n^a$  não possui produto unitário com o 1-forma que define as superfícies espaciais. Sendo eles não duais, ao fazer uma translação normal à superfície  $\Sigma(t)$  para a superfície  $\Sigma(t + \Delta t)$  não temos garantia de que estaremos ainda no mesmo ponto. Introduzimos então um vetor espacial  $\beta^i$  para garantir que as nossas translações temporais nos levem sempre para o mesmo ponto, como mostra a figura 5.

Fonte: Adaptado de (ALCUBIERRE, 2008)

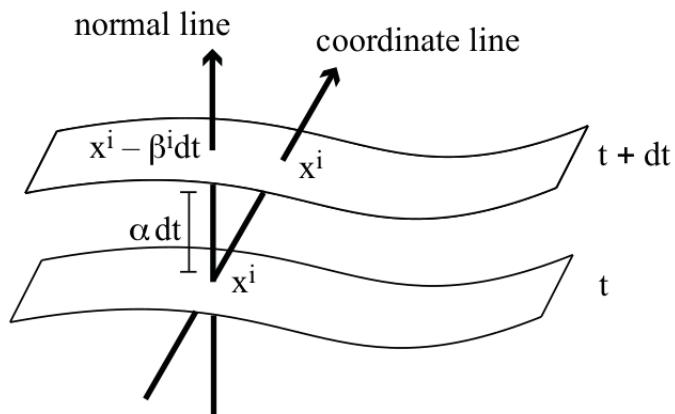


Figura 5 – Ação do vetor de translação na superfície espacial, garantindo que a análise seja sempre feita sobre o mesmo ponto.

Passamos então a considerar a variável tempo escrita em termos da função lapso  $\alpha$  e do vetor de translação  $\beta$ :

$$t^a = \alpha n^a + \beta^a , \quad (2.24)$$

<sup>18</sup> Que nada mais é do que a projeção na superfície da derivada covariante com que estamos acostumados:  $D_i = P_i^a \nabla_a$ .

onde a função  $\alpha$  e as 3 componentes do vetor  $\beta^a$  são escolhas arbitrárias que carregam a seleção de coordenadas presentes nas equações de Einstein. Assim, são variáveis de calibre livremente especificadas.

A partir de 2.18, que serve como uma definição da curvatura extrínseca, podemos, considerando 2.24, escrever:

$$\begin{aligned} -2K_{ab} &= \mathcal{L}_n \gamma_{ab} \\ &= \mathcal{L}_{\left(\frac{1}{\alpha}t - \frac{1}{\alpha}\beta\right)} \gamma_{ab} \\ &= \frac{1}{\alpha} \mathcal{L}_t \gamma_{ab} - \frac{1}{\alpha} \mathcal{L}_\beta \gamma_{ab} \end{aligned}$$

Podemos então concluir que:

$$\boxed{\mathcal{L}_t \gamma_{ab} = -2\alpha K_{ab} + \mathcal{L}_\beta \gamma_{ab}} . \quad (2.25)$$

A equação 2.25 é uma das duas equações de evolução que estamos interessados, representando a evolução temporal da métrica espacial  $\gamma_{ab}$ .

Antes de obtermos a última equação de evolução, retornemos às projeções do tensor de Riemann na superfície espacial. A última projeção de interesse é aquela obtida quando dois dos seus índices são projetados na direção normal. A partir dessa projeção obtemos a equação de Ricci:

$$\mathcal{L}_n K_{ab} = n^d n^c P_a^q P_b^r R_{dr cq} - \frac{1}{\alpha} D_a D_b \alpha - K_b^c K_{ac} . \quad (2.26)$$

A equação de Ricci nos permite obter a derivada de Lie da curvatura extrínseca ao longo do vetor normal  $n^a$ . Usando o vetor temporal definido em 2.24, a derivada de Lie da curvatura extrínseca ao longo desse vetor é:

$$\mathcal{L}_t K_{ab} = \alpha \mathcal{L}_n K_{ab} + \mathcal{L}_\beta K_{ab} , \quad (2.27)$$

onde podemos substituir a derivada de Lie ao longo de  $n^a$  pela sua expressão obtida a partir da equação de Ricci 2.26. Além disso podemos usar a equação de Gauss 2.19 para substituir as projeções do tensor de Riemann para obter (BAUMGARTE; SHAPIRO, 2010):

$$\boxed{\begin{aligned} \mathcal{L}_t K_{ab} &= -D_a D_b \alpha + \alpha (R_{ab} - 2K_{ac} K_b^c + K K_{ab}) \\ &\quad - 8\pi \alpha (S_{ab} - \frac{1}{2} \gamma_{ab} (S - \rho)) + \mathcal{L}_\beta K_{ab} , \end{aligned}} \quad (2.28)$$

onde  $S_{ab} = P_a^c P_b^d T_{cd}$  e  $S = S_a^a$ . A equação 2.28 permite determinar a evolução temporal da curvatura extrínseca.

As quatro equações que obtivemos representam a decomposição das equações de Einstein no formalismo (3 + 1). Temos duas equações de restrição (restrição de momento e Hamiltoniano) e duas equações de evolução (para a métrica espacial e para a curvatura extrínseca), em posse delas podemos tratar o problema de resolver as equações de Einstein como um problema de Cauchy, especificando um conjunto de dados no instante inicial e evoluindo a partir das equações 2.25 e 2.28.

### 2.2.3.3 A escolha de um sistema de coordenadas

O desenvolvimento matemático até este ponto foi feito sem se considerar nenhum sistema de coordenadas específico, agora escolhemos um sistema de coordenadas onde escrever as equações ADM. Escolhemos um conjunto de 3 vetores espaciais normais à direção temporal, que residem na superfície espacial, logo, satisfazendo:

$$\nabla_a t \ e_{(i)}^a = 0 ,$$

onde  $i = \{1, 2, 3\}$ . Esses vetores se movem de uma superfície espacial para a próxima seguindo a direção  $t^a$ . Assim, escolhemos:

$$e_{(0)}^a = t^a = (1, 0, 0, 0) . \quad (2.29)$$

Em termos do vetor normal  $n^a$  e sua correspondente contraparte covariante, temos que:

$$\nabla_a t e_{(i)}^a = -\frac{1}{\alpha} n_a e_{(i)}^a ,$$

onde vemos que as componentes espaciais do vetor normal covariante precisam ser nulas. Considerando que a contração de vetores espaciais com o vetor normal precisa ser zero, a componente  $e_{(0)}^a$  de todos os vetores espaciais precisa ser zero. Em especial, temos:

$$\beta^a = (0, \beta^i) .$$

Podemos então reescrever  $n^a$  em termos de  $\alpha$  e  $\beta$  usando 2.24, obtendo:

$$n^a = \left( \frac{1}{\alpha}, -\frac{\beta^i}{\alpha} \right) . \quad (2.30)$$

A condição de normalização  $n^a n_a = -1$  permite obter a contraparte covariante do vetor normal:

$$n_a = (-\alpha, 0, 0, 0) .$$

A partir da equação 2.16 também podemos reescrever o tensor métrico em termos das variáveis  $\alpha$  e  $\beta^i$ . Temos que :

$$g^{ab} = \gamma^{ab} - n^a n^b .$$

Levando em consideração que as componentes espaciais de um tensor covariante precisam se anular, obtemos:

$$g^{ab} = \begin{pmatrix} -1/\alpha^2 & \beta^i/\alpha^2 \\ \beta^i/\alpha^2 & \gamma^{ij} - \beta^i \beta^j / \alpha^2 \end{pmatrix},$$

onde podemos obter a correspondente forma covariante invertendo a matriz:

$$g_{ab} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 + \beta_l \beta^l & \beta_i \\ \beta_j & \gamma_{ij} \end{pmatrix} . \quad (2.31)$$

Podemos então reescrever o elemento diferencial de linha do espaço-tempo em termos das variáveis do formalismo ADM, obtendo:

$$ds^2 = (-\alpha^2 + \beta_l \beta^l) dt^2 + 2\beta_i dx^i dt + \gamma_{ij} dx^i dx^j . \quad (2.32)$$

Particularizando ainda mais nosso sistema de coordenadas, podemos assumir um sistema de coordenadas com simetria esférica, onde a métrica espacial assume a forma:

$$\gamma_{ab} = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & b^2 r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} , \quad (2.33)$$

onde  $a$  e  $b$  são parâmetros dimensionais que podem se modificar alterando o dimensionamento do espaço-tempo.

Nessas condições o elemento diferencial de linha do espaço-tempo assume a forma:

$$ds^2 = -\alpha^2(r, t) dt^2 + a^2(r, t) dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) . \quad (2.34)$$

A escolha de um sistema de coordenadas permite simplificar alguns termos das equações ADM obtidas anteriormente, podemos escrever então:

$$\boxed{^{(3)}R + K^2 - K_{ij}K^{ij} = 16\pi\rho} , \quad (2.35)$$

$$\boxed{D_j K_i^j - D_i K = 8\pi S_i} , \quad (2.36)$$

$$\begin{aligned} \partial_t K_{ij} = & \beta^l \partial_l K_{ij} + K_{il} \partial_j \beta^l + K_{jl} \partial_i \beta^l - D_i D_j \alpha \\ & + \alpha ({}^{(3)}R_{ij} + K K_{ij} - 2K_{ij} - 2K_{il} K_j^l) + 4\pi \alpha [\gamma_{ij}(S - \rho) - 2S_{ij}] , \end{aligned} \quad (2.37)$$

$$\boxed{\partial_t \gamma_{ij} = -2\alpha K_{ij} + D_i \beta_j + D_j \beta_i} , \quad (2.38)$$

que são as equações que efetivamente substituem as equações de Einstein, permitindo tratar a evolução do espaço-tempo como um problema de valor inicial. Com isso, concluímos nossa descrição do espaço-tempo e das equações de Einstein em termos do formalismo (3 + 1).

## 2.3 Sistemas em colapso gravitacional

A teoria clássica de relatividade nos diz que para uma estrela de massa suficientemente grande, acima do chamado limite de Tolman–Oppenheimer–Volkoff<sup>19</sup>, não há outro destino possível para a evolução dela a não ser o colapso em um buraco negro (MISNER; THORNE; WHEELER, 1970). A formação de buracos negros a partir do colapso gravitacional é um fenômeno comum no universo. Os primeiros trabalhos a investigar esse fenômeno do ponto de vista da relatividade numérica foram os trabalhos de Mathew Choptuik (CHOPTUIK, 1993). Ele foi capaz de observar que um campo escalar (representando uma distribuição de energia no espaço-tempo) poderia colapsar formando uma singularidade em condições específicas. Esse colapso era função da amplitude  $\eta$  desse campo. Para  $\eta > \eta^*$  ocorre a formação de um buraco negro, porém para  $\eta < \eta^*$  o campo escalar se dispersa completamente; esse comportamento caracteriza o chamado fenômeno crítico, onde um comportamento ou propriedade de um sistema apresenta padrões universais característicos de uma transição de fase que são independentes de muitas variáveis do sistema. Tratando-se do colapso de campos escalares, Choptuik observou que o comportamento do sistema seguia uma lei exponencial característica de vários fenômenos de transição de fases, onde a massa do buraco negro próximo do ponto crítico obedece a relação:

$$M_{BH} = |\eta - \eta_*|^\gamma , \quad (2.39)$$

onde  $\gamma$  é um escalar<sup>20</sup> universal<sup>21</sup>. Choptuik concluiu que  $\gamma \approx 0,37$ , esses resultados foram posteriormente confirmados por outros métodos, como métodos perturbativos (GUNDLACH, 1997; MARTÍN-GARCÍA; GUNDLACH, 1999) .

<sup>19</sup> Esse limite equivale a aproximadamente duas vezes a massa do Sol.

<sup>20</sup> Usamos  $\gamma$  por se tratar de uma notação padrão. Não há relação direta com a métrica espacial do formalismo ADM.

<sup>21</sup>  $\gamma$  é universal no sentido de ser o mesmo valor, independente das condições iniciais do sistema quando a mesma fonte de matéria é considerada. Portanto, o valor de  $\gamma$  obtido por Choptuik deveria ser o mesmo para campos escalares sem massa, independente de outras propriedades inferidas durante os cálculos.

Além do comportamento crítico próximo ao valor de amplitude  $\eta_*$ , também existe uma periodicidade no comportamento da solução, que pode ser observada em intervalos espaço-temporais muito menores. Para observar tal periodicidade é conveniente analisar as variáveis do sistema em sua forma logarítmica. Como exemplo, podemos analisar o tempo próprio logarítmico  $\Lambda = \ln(\tau_* - \tau)$ <sup>22</sup>, assim como fez Choptuik, e constatar que o comportamento do campo escalar apresenta uma periodicidade, repetindo-se em  $\Lambda + \Delta$ , com  $\Delta = 3,43$ , porém com uma escala  $e^\Delta \approx 30$  vezes menor. Essa periodicidade é conhecida como *echoing* e  $\Delta$ , denominado período de eco, que também é uma grandeza universal para o tipo de matéria estudada. As propriedades do fenômeno crítico referentes ao *echoing* também foram replicados por métodos semi-analíticos (MARTÍN-GARCÍA; GUNDLACH, 2003).

Com o advento de métodos mais refinados e recursos computacionais mais poderosos, e com o uso de outros métodos, como métodos semi-analíticos, a lei exponencial descoberta por Choptuik (equação 2.39) foi modificada para melhor adequação com os dados. Atualmente, os resultados sugerem (GUNDLACH, 1997):

$$\ln M_{\text{BH}} = C + \gamma \ln |\eta - \eta_*| + f(\ln |\eta - \eta_*|) , \quad (2.40)$$

onde  $f$  é uma função periódica com frequência angular:

$$\omega = \frac{4\pi\gamma}{\Delta} . \quad (2.41)$$

A lei 2.40 é aplicável a várias grandezas, não somente a massa. Na verdade, qualquer grandeza  $Q$  com dimensão de comprimento  $\zeta$  obedece a lei:

$$\ln Q = C + \zeta\gamma \ln |\eta - \eta_*| + f(\ln |\eta - \eta_*|) . \quad (2.42)$$

Trabalhando no regime subcrítico, como optamos por fazer nesse trabalho, não podemos analisar a massa do buraco negro, tendo em vista que esse não irá se formar, mas podemos substituir a massa pela densidade energética  $\rho$  (a ser definida na próxima seção) no ponto central ( $r = 0$ ) e esperamos o mesmo comportamento de 2.42, i.e.<sup>23</sup>:

$$\ln \rho_{\text{central}}^{\max} = C - 2\gamma \ln |\eta - \eta_*| + f(\ln |\eta - \eta_*|) . \quad (2.43)$$

Com base em (BAUMGARTE, 2018) assumimos que a função  $f$  tem a forma:

$$f(x) = A \sin(\omega x + \phi_0) , \quad (2.44)$$

Com frequência:

$$\omega = \frac{4\pi\gamma}{\Delta} . \quad (2.45)$$

<sup>22</sup> Onde  $\tau_*$ , chamado tempo de acumulação, é a medida de tempo próprio necessária para estabelecer o colapso ou dispersão do campo escalar.

<sup>23</sup> Para o caso da densidade de energia que tem dimensão  $L^{-2}$ ,  $\zeta = -2$ .

Além disso, conjectura-se que a partir de  $\Delta$  e  $\gamma$  podemos obter uma outra constante universal, cujo valor deve ser (HOD; PIRAN, 1997):

$$T = \frac{\Delta}{2\gamma} \approx 4,6 . \quad (2.46)$$

### 2.3.1 Campos escalares

A evolução de um campo escalar  $\psi$  sem massa é descrita pela equação de Klein-Gordon (CHIRENTI, 2017):

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \partial_\nu \psi) = 0 , \quad (2.47)$$

O campo escalar pode ser acoplado ao campo gravitacional através de uma densidade lagrangiana:

$$\mathcal{L}(\phi) = -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi . \quad (2.48)$$

Variando a ação 2.11 recuperamos as equações de Einstein e a equação de Klein-Gordon, que podem ser colocadas na forma:

$$\boxed{\partial_t \Psi = \partial_r \left( \frac{\alpha}{a} \Pi \right)} , \quad (2.49)$$

$$\boxed{\partial_t \Pi = \frac{1}{r^2} \partial_r \left( r^2 \frac{\alpha}{a} \Psi \right)} , \quad (2.50)$$

onde usamos as variáveis auxiliares:

$$\Psi(t, r) = \partial_r \psi(t, r) , \quad \Pi(t, r) = \frac{a(t, r)}{\alpha(t, r)} \partial_t \psi(t, r) , \quad (2.51)$$

com o Ansatz 2.34 para a métrica. Variando a ação podemos também obter o tensor energia-momento para um campo escalar, equivalente a :

$$T_{\mu\nu}^\psi = \partial_\mu \psi \partial_\nu \psi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \partial_\alpha \psi \partial^\alpha \psi . \quad (2.52)$$

Segue que a densidade energética definida para o formalismo ADM será<sup>24</sup>:

$$\rho = n^\mu n^\nu T_{\mu\nu}^\psi = \frac{\Psi^2 + \Pi^2}{2a^2} . \quad (2.53)$$

A escolha de um calibre com simetria esférica 2.34 implica que  $K = K_r^r$ . Assim, a restrição do Hamiltoniano se torna:

$$\mathcal{H} = {}^{(3)}R - 16\pi\rho , \quad (2.54)$$

---

<sup>24</sup> Por consequência,  $\rho_{\text{central}}^{\max} = \rho(0, t) = \frac{\Pi^2(0, t) + \Psi^2(0, t)}{2a^2(0, t)}$ .

a qual, com o escalar de Ricci:

$${}^{(3)}R = \frac{4}{ra^2} \left( \frac{\partial_r a}{a} + \frac{a^2 - 1}{2r} \right), \quad (2.55)$$

se torna:

$$\boxed{\frac{\partial_r a}{a} + \frac{a^2 - 1}{2r} = 2\pi r(\Pi^2 + \Psi^2)}, \quad (2.56)$$

sendo essa uma das equações de restrição para o sistema de equações de um campo escalar no formalismo ADM. Outra equação importante é obtida observando-se que para o calibre escolhido  $K_\theta^\theta = 0 = K_\phi^\phi$ , por consequência  $\partial_t K_{\theta\theta} = 0$  e, a partir de 2.38, obtemos:

$$\boxed{\frac{\partial_t \alpha}{\alpha} - \frac{\partial_r a}{a} - \frac{a^2 - 1}{r} = 0} \quad (2.57)$$

## 2.4 Métodos numéricos para solução de equações diferenciais

Para resolução numérica das equações diferenciais, são necessários métodos específicos que permitem trabalhar com funções de natureza contínua em um domínio computacional discreto. Há vários métodos para resolução de equações diferenciais, entretanto para se trabalhar com equações diferenciais parciais e seus respectivos sistemas, é comum o emprego dos métodos de diferenças finitas (LI; QIAO; TANG, 2018).

Esse método consiste em aplicar uma aproximação a grandezas contínuas, como derivadas e funções. Para as derivadas podemos assumir que um diferencial é representado por uma diferença discreta. Isso pode ser feito através da teoria de expansão em série de Taylor, onde uma função  $f(x)$  pode ser escrita como

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \dots.$$

Podemos então, através de uma aproximação (desconsiderando termos de ordem maior ou igual a 2), usar:

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h},$$

obviamente, ao fazer tal aproximação estamos inserindo um erro nos nossos cálculos. Entretanto, esse erro pode ser reduzido considerando aproximações de ordem superior para as derivadas, por exemplo, podemos escrever:

$$f'(x) = \frac{2f(x+h) + 3f(x) - 6f(x-h) + f(x-2h)}{6h},$$

que é uma aproximação de terceira ordem para  $f'(x)$ . Aproximações mais precisas, de ordem maior podem ser obtidas a partir da expansão da série de Taylor em ordens superiores e da substituição dos diferentes termos. O método de diferenças finitas transforma o problema de se resolver uma equação (ou sistema de equações) diferencial(ais) em um problema onde

se deve resolver uma equação (ou sistema de equações) algébrica(s). Para a resolução desse sistema outros métodos numéricos podem ser necessários, como o método da bissecção ou método de Newton (LI; QIAO; TANG, 2018).

As equações que estamos interessados em resolver nesse trabalho formam o sistema de equações de Einstein-Klein-Gordon no formalismo ADM, composto pelas equações 2.49, 2.50, 2.56 e 2.57. Discretizando (reescrevendo as equações como diferenças finitas) até a segunda ordem, obtemos<sup>25</sup>:

$$\frac{\Psi_j^{n+1} - \Psi_j^{n-1}}{2\Delta t} = \frac{1}{2\Delta r} \left[ \frac{\alpha_{j+1}^n}{a_{j+1}^n} \Pi_{j+1}^n - \frac{\alpha_{j-1}^n}{a_{j-1}^n} \Pi_{j-1}^n \right] \quad (2.58)$$

$$\frac{\Pi_j^{n+1} - \Pi_j^{n-1}}{2\Delta t} = \frac{3}{r_{j+1}^2 - r_{j-1}^2} \left[ r_{j+1}^2 \frac{\alpha_{j+1}^n}{a_{j+1}^n} \Pi_{j+1}^n - r_{j-1}^2 \frac{\alpha_{j-1}^n}{a_{j-1}^n} \Pi_{j-1}^n \right] \quad (2.59)$$

$$\begin{aligned} \frac{A_{j+1}^{n+1} - A_j^{n+1}}{\Delta r} + \frac{\exp\{(A_{j+1}^{n+1} - A_j^{n+1})\} - 1}{2r_{j+1/2}} \\ - 2\pi r_{j+1/2} \left\{ \left[ \frac{1}{2} (\Psi_{j+1}^{n+1} + \Psi_j^{n+1}) \right]^2 + \left[ \frac{1}{2} (\Pi_{j+1}^{n+1} + \Pi_j^{n+1}) \right]^2 \right\} = 0 \end{aligned} \quad (2.60)$$

$$\frac{\alpha_j^{n+1} - \alpha_j^{n-1}}{2\Delta r} + \frac{1}{2} (\alpha_{j+1}^{n+1} + \alpha_j^{n+1}) \left\{ \frac{1 - [\frac{1}{2}(a_j^{n+1} + a_{j+1}^{n+1})]^2}{r_{j+1/2}} - \frac{2(a_j^{n+1} - a_{j+1}^{n+1})}{\Delta r(a_j^{n+1} + a_{j+1}^{n+1})} \right\} = 0 \quad (2.61)$$

Para esse sistema de equações a estabilidade é garantida contanto que a condição de Courant-Friedrichs-Lowy (COURANT; FRIEDRICH; LEWY, 1967) seja satisfeita<sup>26</sup>:

$$C = \frac{\Delta t}{\Delta r} \leq 1 \quad (2.62)$$

---

<sup>25</sup> Representamos as equações para um ponto espacial  $j$  em um instante de tempo  $n$ .

<sup>26</sup> Em nossa implementação, tomamos o número  $C = 0,5$ .



# 3 Resultados

## 3.1 SFCollapse1D

Nossos estudos em colapso gravitacional foram feitos com base no programa SFCollapse1D (WERNECK et al., 2021). Trata-se de um código desenvolvido usando-se o formalismo ADM, específico para trabalho com campos escalares em um sistema de coordenadas esférico. O código utiliza o método das diferenças finitas de segunda ordem para resolução das equações diferenciais parciais.

SFCollapse1D apresenta um recurso extra que torna os cálculos mais eficientes e possíveis de serem realizados em sistemas computacionais de menor escala. Com o uso da seguinte transformação de coordenadas (RUCHLIN; ETIENNE; BAUMGARTE, 2018):

$$r = r_{\max} \frac{\sinh(\frac{x}{w})}{\sinh(\frac{1}{w})}, \quad (3.1)$$

onde  $r_{\max}$  representa a extensão do domínio da grade numérica,  $w$  é um parâmetro a ser especificado que define a densidade de pontos próximo da origem. Com esse sistema de coordenadas é possível definir uma amostragem uniforme para  $x \in [0, 1]$ , que será transformada em uma amostragem não uniforme em  $r$ , obtendo uma maior densidade de pontos próximo à origem, onde uma maior resolução é necessária devido às distorções do espaço-tempo. O uso desse sistema de coordenadas contorna a necessidade de se utilizar os métodos AMR (*Adaptative Mesh Refinement*) (CHOPTUIK, 2000; HERN, 2000).

Para a execução do programa é necessário se especificar as configurações da grade numérica que descreve a discretização do espaço-tempo. Nos nossos cálculos, sempre consideramos os valores  $N_r = 320$ ,  $r_{\max} = 16$ ,  $w = 0,08$ . Tais valores, já foram anteriormente utilizados para replicar com alta precisão os resultados que caracterizam o fenômeno crítico no colapso de campos escalares sem massa (WERNECK, 2020).

A rotina utilizada pelo programa para a determinação do colapso gravitacional, se baseia no fato de que a função lapso  $\alpha$  mede o intervalo de tempo próprio entre duas superfícies espaciais. Se  $\alpha \rightarrow 0$  próximo da origem do sistema de coordenadas, assumimos a formação de uma singularidade e o colapso do campo escalar em questão.

Para determinar o valor da amplitude crítica para o campo escalar,  $\eta_*$  na equação 2.39, executamos SFCollapse1D para diferentes valores de amplitude  $\eta$ <sup>1</sup>. Mantemos um registro dos valores de amplitude que definem ou não colapso, e usamos uma rotina de

---

<sup>1</sup> Para as configurações de grade já especificadas, os valores de  $\eta$  utilizados variam de 0,3 até 0,5, e o campo crítico sempre tende a estar entre esses dois valores.

bisseção para delimitar com precisão cada vez maior o intervalo onde o valor da amplitude crítica está localizada. Como medida de precisão usamos o erro:

$$\delta\eta = \frac{\eta_{\text{forte}} - \eta_{\text{fraco}}}{\eta_{\text{fraco}}} , \quad (3.2)$$

onde  $\eta_{\text{forte}}$  corresponde à amplitude do campo escalar que ocasiona colapso gravitacional, e  $\eta_{\text{fraco}}$  àquela que gera dispersão do campo escalar.

Nas nossas análises refinamos os cálculos até  $\delta\eta \approx 10^{-8}$ , o que muito provavelmente foi um dos fatores limitantes que não nos permitiu obter valores tão próximos como os da literatura. Resultados anteriores capazes de replicar as grandezas obtidas por Choptuik ([WERNECK, 2020](#)) fizeram o refinamento de  $\delta\eta$  até  $10^{-13}$ .

Como mencionado, o critério para determinação do colapso do campo escalar é a análise da função lapso  $\alpha$  na origem do sistema de coordenadas. No programa SFcollapse1D esse resultado é anotado em cada passo iterativo no processo da solução das equações diferenciais por diferenças finitas.

Em uma situação onde o colapso é observado, o comportamento típico da função lapso no ponto central é mostrado na figura 6.

Fonte: O Autor.

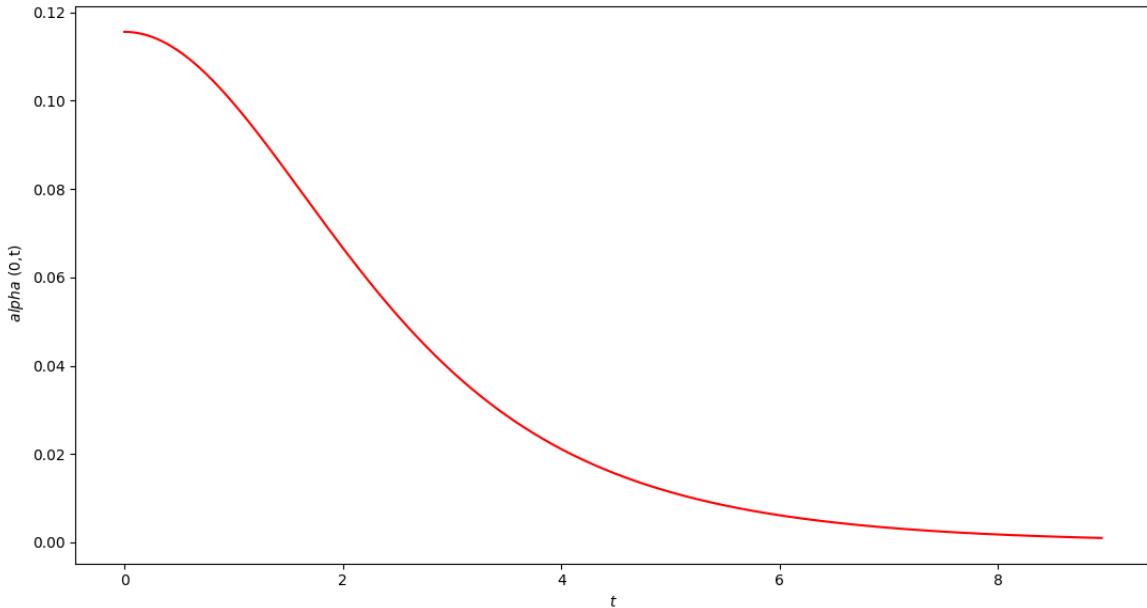


Figura 6 – Valor da função lapso no ponto central, em um caso de colapso do campo escalar.

Quando ocorre a dispersão do campo escalar o comportamento da função lapso é tender ao valor unitário, como demonstra a figura 7.

Fonte: O Autor.

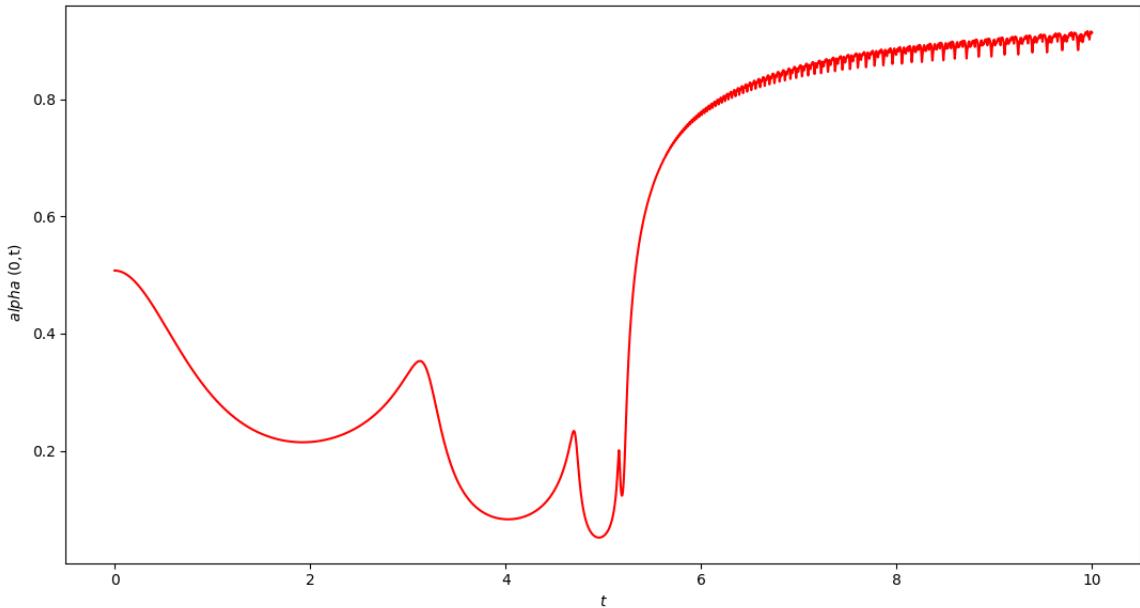


Figura 7 – Valor da função lapso no ponto central, em um caso de dispersão do campo escalar.

### 3.2 Fenômeno Crítico de Campos Escalares no Espaço Plano

Uma vez determinado o valor de  $\eta_*$  com a precisão desejada, realizamos diversas execuções no regime subcrítico ( $\eta < \eta_*$ ), em cada uma delas registramos os valores de  $\eta$  e os valores da densidade energética no ponto central  $\rho(0, t)$ , calculadas a partir dos valores de  $\Pi$ ,  $\Psi$  e  $a$ , que são obtidos em cada instante de tempo por SFcollapse1D no processo de resolução do programa.

Em posse dos valores de  $\eta$  e de  $\rho_{\text{central}}^{\max}$  realizamos um ajuste numérico em duas etapas. Primeiro, consideramos apenas a componente linear da equação 2.43 e realizamos um ajuste com os valores de  $\eta$  como variável independente e  $\rho_{\text{central}}^{\max}$  como variável dependente. As variáveis  $\eta_*$ ,  $\gamma$  e  $C$  são parâmetros a serem especificados pelo ajuste<sup>2</sup>. Ou seja, realizamos um ajuste linear em:

$$\ln \rho_{\text{central}}^{\max} = C - 2\gamma \ln |\eta - \eta_*| . \quad (3.3)$$

Obtemos então uma reta que melhor se ajusta aos dados a partir de valores de  $\eta_*$ ,  $\gamma$  e  $C$ . Representamos esse resultado na figura 8.

Com os valores obtidos para  $\eta_*$ ,  $\gamma$  e  $C$ , fazemos um segundo ajuste, onde a nossa

<sup>2</sup> Para a realização do ajuste usamos a biblioteca SciPy (VIRTANEN et al., 2020).

Fonte: O Autor.

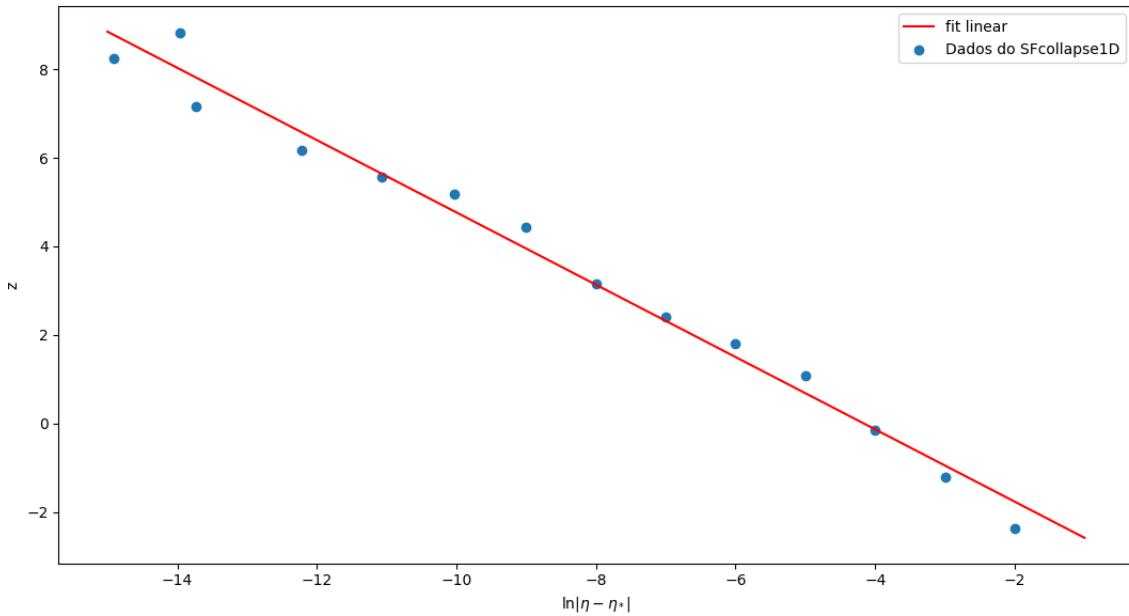


Figura 8 – Ajuste linear para os dados de  $z = \ln \rho_{\text{central}}^{\max}$  em função de  $\ln |\eta - \eta_*$

variável independente passa a ser  $\ln |\eta - \eta_*$  e nossa variável dependente é:

$$\ln \rho_{\text{central}}^{\max} = C + 2\gamma \ln |\eta - \eta_*| ,$$

ou seja, estamos subtraindo dos valores  $\rho_{\text{central}}^{\max}$  a componente linear que determinamos, fazendo com que nossa variável dependente passe a ser somente a componente oscilatória dos dados. Realizamos então um ajuste com a função:

$$f(x) = A \sin(\omega x + \phi_0) , \quad (3.4)$$

com  $x = \ln |\eta - \eta_*$ . Com esse segundo ajuste determinamos os parâmetros  $\omega$ ,  $A$  e  $\phi_0$ .

Na figura 9 mostramos o resultado final do ajuste da função 2.43 nos dados obtidos a partir de SFcollapse1D. Através desse procedimento obtivemos os valores dos parâmetros

Fonte: O Autor.

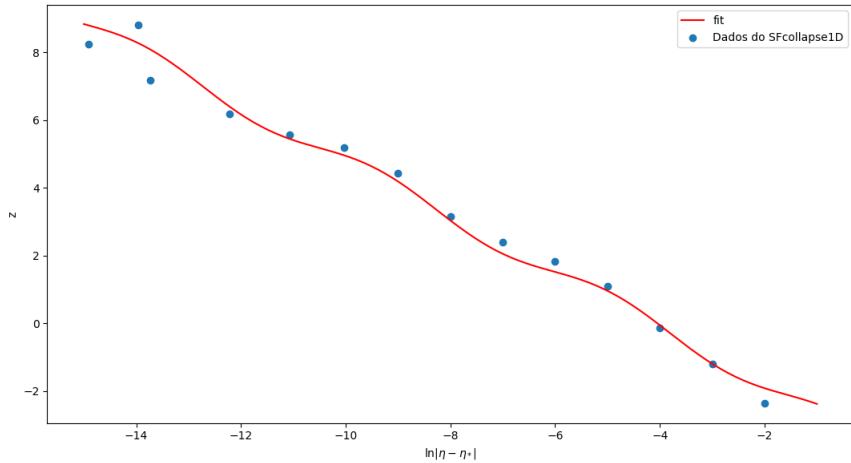


Figura 9 – Ajuste final para os dados de  $z = \ln \rho_{\text{central}}^{\max}$  em função de  $\ln |\eta - \eta_*|$ .

ajustados, mostrados na tabela 1.

Fonte: O Autor.

Parâmetro	Valor encontrado
$\eta_*$	0,336425
$C$	-3,396793
$\gamma$	0,408158
$A$	0,274121
$\omega$	1,408357
$\phi_0$	2,219645

Tabela 1 – Resultados obtidos para o fenômeno crítico no espaço plano.

Calculamos também os valores para  $\Delta$  e  $T$ , o período de oscilação universal. Obtivemos  $\Delta = 3,641876$  e  $T = 4,461359$ , resultados razoavelmente próximos aos da literatura ( $T = 4,6$  e  $\Delta = 3,43$ ). Esses resultados sugerem que mesmo com o uso de precisões inferiores do que o estado da arte da literatura, fomos capazes de observar o comportamento crítico. Assim nossos resultados para sistemas com a constante cosmológica, os quais apresentaremos a seguir, podem ser usados não só qualitativamente mas também quantitativamente para se mapear a influência da constante cosmológica no fenômeno crítico no colapso de campos escalares.

### 3.3 Colapso de campos escalares na presença de uma constante cosmológica

Para considerar os efeitos causados pela presença de uma constante cosmológica devemos retornar à ação de Einstein-Hilbert com o termo de Klein-Gordon, dessa vez consideramos a ação:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{16\pi} (R - 2\Lambda) - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \psi \partial_\nu \psi \right] \quad (3.5)$$

Aplicando os princípios do cálculo variacional e seguindo um procedimento semelhante com aquele da seção 2.3.1 chegamos nas seguintes equações:

$$\boxed{\partial_t \Psi = \partial_r \left( \frac{\alpha}{a} \Pi \right)}, \quad (3.6)$$

$$\boxed{\partial_t \Pi = \frac{1}{r^2} \partial_r \left( r^2 \frac{\alpha}{a} \Psi \right)}, \quad (3.7)$$

$$\boxed{\frac{\partial_r a}{a} + \frac{a^2(1 - \Lambda r^2) - 1}{2r} = 2\pi r (\Pi^2 + \Psi^2)}, \quad (3.8)$$

$$\boxed{\frac{\partial_t \alpha}{\alpha} - \frac{\partial_r a}{a} - \frac{a^2(1 - \Lambda r^2) - 1}{r} = 0}. \quad (3.9)$$

Assim, discretizamos essas equações, seguindo o método das diferenças finitas descrito na seção 2.4 e substituímos no código fonte de SFcollapse1D.

O primeiro passo foi replicar os resultados da seção anterior, tomando  $\Lambda = 0$ . Com isso pudemos atestar que nossa implementação não possuía nenhum erro<sup>3</sup>. Em seguida, usamos a nossa implementação modificada do programa para avaliar o fenômeno crítico no espaço Anti de Sitter.

### 3.4 Fenômeno crítico de campos escalares no espaço AdS

O procedimento seguido para a análise do fenômeno crítico no espaço AdS é o mesmo descrito anteriormente para campos escalares no espaço plano. Apresentamos aqui os principais resultados e suas comparações com o caso anterior.

#### 3.4.1 AdS com $\Lambda = -0,001$

Configurando SFcollapse1D com  $\Lambda = -0,001$ , realizamos os cálculos para determinar o valor do campo crítico com um erro  $\delta\eta \approx 10^{-8}$ . Realizamos o ajuste em duas etapas e representamos na figura 10 o resultado final do ajuste.

---

<sup>3</sup> Nossa implementação final com as modificações no código de SFcollapse1D podem ser consultadas em ([LUCAS P. FRANCISCO;AMANDA G. SATO, 2021](#))

Fonte: O Autor.

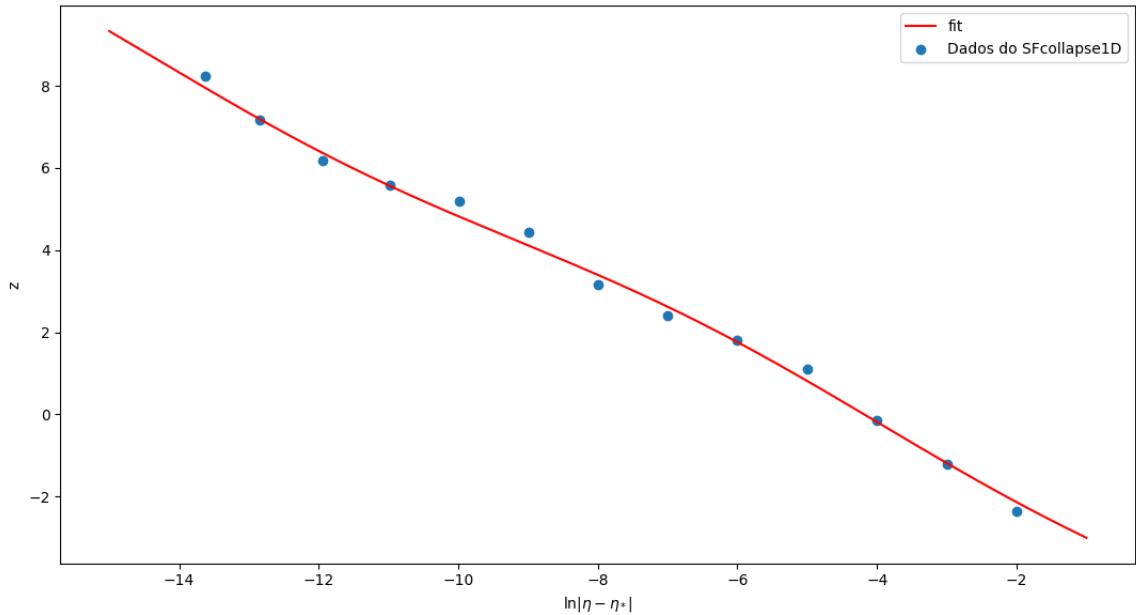


Figura 10 – Ajuste final para os dados de  $z = \ln \rho_{\text{central}}^{\max}$  em função de  $\ln |\eta - \eta_*|$ , para  $\Lambda = -0,001$ .

Na tabela 2 apresentamos os resultados para os parâmetros do ajuste.

Fonte: O Autor.

Parâmetro	Valor encontrado
$\eta_*$	0,336300
$C$	-3,617329
$\gamma$	0,428248
$A$	0,251261
$\omega$	0,606650
$\phi_0$	-0,734963

Tabela 2 – Resultados obtidos para o fenômeno crítico no espaço AdS com  $\Lambda = -0,001$ .

Com os valores de  $\gamma$  e  $\omega$  e a partir de 2.45 calculamos  $\Delta = 8,870881$  e  $T = 10,357188$ .

### 3.4.2 AdS com $\Lambda = -0,01$

Repetindo o mesmo procedimento descrito na seção anterior, porém configurando SFcollapse1D para  $\Lambda = -0,01$ , obtivemos o ajuste da figura 11.

Fonte: O Autor.

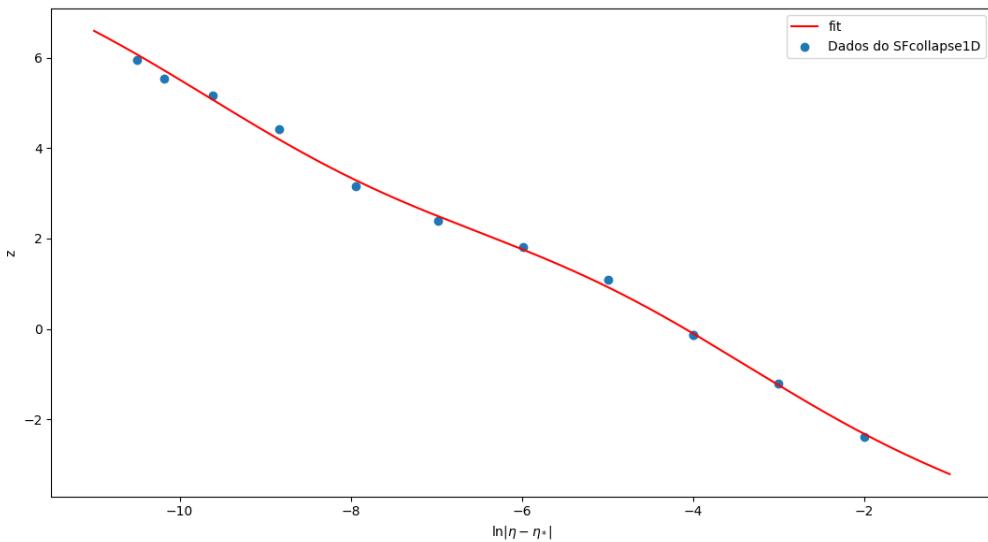


Figura 11 – Ajuste final para os dados de  $z = \ln \rho_{\text{central}}^{\max}$  em função de  $\ln |\eta - \eta_*|$  para  $\Lambda = -0,01$ .

Esse ajuste foi feito em um intervalo menor de valores de  $\ln |\eta - \eta_*|$  devido à presença de um comportamento inesperado para valores mais negativos dessa grandeza. Atribuímos esse comportamento a instabilidades do método numérico e optamos por não incluir na nossa análise. Para os parâmetros do ajuste, calculamos os dados da tabela 3.

Fonte: O Autor.

Parâmetro	Valor encontrado
$\eta_*$	0,335176
$C$	-4,004196
$\gamma$	0,472388
$A$	0,210952
$\omega$	0,996367
$\phi_0$	0,193102

Tabela 3 – Resultados obtidos para o fenômeno crítico no AdS com  $\Lambda = -0,01$ .

Os valores para os períodos oscilatórios foram  $\Delta = 5,957846$  e  $T = 6,306097$ .

### 3.5 Análise dos resultados

Os resultados que obtivemos, estão em diversos aspectos dentro das expectativas. Como citamos anteriormente, ([ZHANG et al., 2016](#)) encontrou que a presença de uma constante cosmológica positiva (em um espaço dS) teria como um dos efeitos um aumento do limiar de formação de um buraco negro (representado aqui pelo campo crítico). Nossos resultados mostraram que a presença de uma constante cosmológica negativa (AdS) tende a diminuir o valor do campo crítico, como mostra na tabela 4.

Fonte: O Autor.

$\Lambda$	$\eta_*$
0	0,336425
-0,001	0,336300
-0,01	0,335176

Tabela 4 – Campos críticos para diferentes valores de constante cosmológica.

Outro resultado interessante que obtivemos é a influência da constante cosmológica no período universal do fenômeno de *echoing*. A presença de uma constante cosmológica aparenta aumentar o período, ou reduzir a frequência de oscilação observada na solução subcrítica. Como mostra a tabela 5.

Fonte: O Autor.

$\Lambda$	$T$
0	4,461359
-0,001	10,357188
-0,01	6,306097

Tabela 5 – Período universal para diferentes valores de constante cosmológica.

A comparação entre os dois valores de constante cosmológica já é mais difícil, em parte pelo fato de nossos cálculos para  $\Lambda = -0,01$  apresentarem ainda menor precisão do que os demais. Tivemos que limitar nossa análise devido a um comportamento instável da solução que se manifestou a medida que  $\eta \rightarrow \eta_*$ . Instabilidades numéricas presentes no formalismo ADM são um fenômeno bem conhecido ([WERNECK, 2020](#)). Essas instabilidades também

se manifestaram durante as tentativas de se analisar os sistemas dS, dessa forma não foi possível fazer uso dessa versão de SFCollapse1D para análises rigorosas do fenômeno crítico no espaço de Sitter.

Assim esperamos em trabalhos futuros aprimorar nossas análises com melhores valores de  $\delta\eta$  e possivelmente fazer uso de um formalismo mais robusto como é o caso do formalismo BSSN.

## 4 Conclusão

Nesse trabalho apresentamos alguns resultados de nossos estudos em relatividade numérica. Em particular, estudamos o colapso de campos escalares sem massa na presença de uma constante cosmológica. Para que isso fosse possível, realizamos modificações no programa SFCollapse1D. Em nossas simulações fomos capazes de analisar o fenômeno crítico, característico de transições de fase, originalmente descoberto por Matthew Choptuik ([CHOPTUIK, 1993](#)), e como esse é afetado pela presença de uma constante cosmológica negativa. Constatamos que a presença de uma constante cosmológica negativa tende a facilitar o colapso gravitacional, o que está de acordo com alguns resultados da literatura ([ZHANG et al., 2016](#)). Além disso verificamos que no fenômeno crítico, a constante cosmológica atua como um fator atenuante das oscilações observadas originalmente por Choptuik, reduzindo a frequência de oscilação característica do fenômeno de *echoing*. Entretanto, algumas limitações foram observadas em nossos estudos, que restringem interpretações quantitativas mais rigorosas. Atribuímos essas limitações a dois fatores. Primeiro, ao nosso uso de uma precisão restrita nas simulações, que foi adotada por limitações de tempo e recursos computacionais. Em segundo lugar, pelo uso do formalismo ADM, que apresenta algumas limitações intrínsecas no que tange à estabilidade do método. Visamos contornar essas limitações e ampliar os casos analisados em trabalhos futuros, estudando, por exemplo, modelos mais próximos da realidade física, usando fluidos de fundo que possam afetar a formação de buracos negros.

O colapso gravitacional em um espaço AdS é relevante não somente pelas questões pertinentes ao problema da constante cosmológica ([WEINBERG, 1989](#)) mas também apresenta relevâncias em fenômenos de transição de fases pela correspondência AdS/CFT ([ARSIWALLA et al., 2011](#)). Além disso, com os resultados mais recentes do LIGO (Laser interferometer Gravitational-Wave Observatory) e VIRGO, e com os futuros resultados de experimentos como o do interferômetro LISA, uma nova era de estudos de fenômenos gravitacionais está por vir. Para a interpretação desses fenômenos, modelos teóricos e computacionais mais robustos são necessários. O fenômeno de colapso possui relevância também nesse tipo de fenômeno, tendo em vista que o colapso de massas em rotação pode ser uma fonte importante de ondas gravitacionais.

Portanto, o estudo do fenômeno de colapso e das suas várias instâncias é uma área de pesquisa promissora que ainda pode ser vastamente explorada.



# Referências

- ALCUBIERRE, M. *Introduction to 3+ 1 numerical relativity*. [S.l.]: Oxford University Press, 2008. v. 140. Citado 5 vezes nas páginas 13, 22, 23, 25 e 27.
- ARNOWITT, R.; DESER, S.; MISNER, C. W. The dynamics of general relativity. *Springer Science+Business Media*, 2008. Citado na página 22.
- ARSIWALLA, X. et al. Degenerate Stars and Gravitational Collapse in AdS/CFT. *JHEP*, v. 01, p. 144, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 47.
- BAUMGARTE, T. W. Aspherical deformations of the choptuik spacetime. *Physical Review D*, American Physical Society, v. 98, n. 8, 2018. Disponível em: <<https://par.nsf.gov/biblio/10077271>>. Citado na página 32.
- BAUMGARTE, T. W.; SHAPIRO, S. L. *Numerical relativity: solving Einstein's equations on the computer*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010. Citado 4 vezes nas páginas 23, 25, 26 e 28.
- BERNAL, A. N.; SANCHEZ, M. On smooth cauchy hypersurfaces and geroch's splitting theorem. *Communications in Mathematical Physics*, v. 243, n. 461-470, 2003. Citado na página 23.
- CALVO, R. M.; GARRIGA, J. *Geometry of (Anti-)De Sitter space-time*. 2018. <<http://deposit.ub.edu/dspace/bitstream/2445/125099/1/Monge%20Calvo%20Ricard.pdf>>. Online; accessed 12 November 2021. Citado na página 22.
- CARROLL, S. M. *Spacetime and Geometry: An introduction to general relativity*. [S.l.]: Addison Wesley Longman, Inc, 2003. Citado na página 19.
- CHIRENTI, C. Black hole quasinormal modes in the era of ligo. *Brazilian Journal of Physics*, v. 48, 08 2017. Citado na página 33.
- CHOPTUIK, M. W. Universality and scaling in gravitational collapse of a massless scalar field. *Phys. Rev. Lett.*, American Physical Society, v. 70, p. 9–12, Jan 1993. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.70.9>>. Citado 3 vezes nas páginas 13, 31 e 47.
- CHOPTUIK, M. W. Making arbitrarily small black holes: Experiences with amr in numerical relativity. In: BADEN, S. B. et al. (Ed.). *Structured Adaptive Mesh Refinement (SAMR) Grid Methods*. New York, NY: Springer New York, 2000. p. 153–163. ISBN 978-1-4612-1252-2. Citado na página 37.
- COURANT, R.; FRIEDRICHHS, K.; LEWY, H. On the partial difference equations of mathematical physics. *IBM Journal of Research and Development*, v. 11, n. 2, p. 215–234, 1967. Citado na página 35.
- DANIELI, A. *ADM formalism: a Hamiltonian approach to General Relativity*. 2018. <<http://deposit.ub.edu/dspace/bitstream/2445/125099/1/Monge%20Calvo%20Ricard.pdf>>. Online; accessed 12 November 2021. Citado na página 23.

GUNDLACH, C. Understanding critical collapse of a scalar field. *Physical Review D*, American Physical Society (APS), v. 55, n. 2, p. 695–713, Jan 1997. ISSN 1089-4918. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.55.695>>. Citado 2 vezes nas páginas 31 e 32.

HERN, S. Numerical relativity and inhomogeneous cosmologies. *arXiv:gr-qc/0004036*, 05 2000. Citado na página 37.

HOD, S.; PIRAN, T. Fine structure of choptuik's mass-scaling relation. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 55, p. R440–R442, Jan 1997. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.55.R440>>. Citado na página 33.

LEE, J. M. *Introduction to Smooth Manifolds*. [S.l.]: Springer Science Business Media, 2013. Citado na página 16.

LI, Z.; QIAO, Z.; TANG, T. *Numerical solution of Differential equations*: Introduction to the finite difference and finite element methods. [S.l.]: Cambridge University Press, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 35.

LUCAS P. FRANCISCO;AMANDA G. SATO. *SFcollapse1D 2.0*. 2021. <<https://github.com/lucp770/SFcollapse1D>>. Online; accessed 12 November 2021. Citado na página 42.

MARTÍN-GARCÍA, J. M.; GUNDLACH, C. All nonspherical perturbations of the choptuik spacetime decay. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 59, p. 064031, Feb 1999. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.59.064031>>. Citado na página 31.

MARTÍN-GARCÍA, J. M.; GUNDLACH, C. Global structure of choptuik's critical solution in scalar field collapse. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 68, p. 024011, Jul 2003. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.68.024011>>. Citado na página 32.

MISNER, C. W.; THORNE, K. S.; WHEELER, J. A. *Gravitation*. [S.l.]: W.H. Freeman and company, 1970. Citado 4 vezes nas páginas 17, 20, 21 e 31.

MUNKRES, J. *Topology*. [S.l.]: Pearson Education Limited, 2014. Citado na página 15.

RENTELN, P. *Manifold, Tensors and Forms*: An introduction for mathematicians and physicists. [S.l.]: Cambridge university press, 2014. Citado na página 17.

RUCHLIN, I.; ETIENNE, Z. B.; BAUMGARTE, T. W. SENR/NRPy+: Numerical relativity in singular curvilinear coordinate systems. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 97, p. 064036, Mar 2018. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.97.064036>>. Citado na página 37.

SAHNI, V.; KRASÍNSKI, A. Republication of: The cosmological constant and the theory of elementary particle. *Springer Science+Business Media*, 2008. Citado na página 21.

SCHUTZ, b. *A first course in general relativity*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2010. Citado na página 18.

- STANLEY DESER. *Arnowitt-Deser-Misner formalism*. 2008. <[http://www.scholarpedia.org/article/Arnowitt-Deser-Misner\\_formalism](http://www.scholarpedia.org/article/Arnowitt-Deser-Misner_formalism)>. Online; accessed 12 November 2021. Citado na página 22.
- TAYLOR, F. E.; WHEELER, J. A. *Exploring Black holes: Introduction to general relativity*. [S.l.]: Addison Wesley Longman, Inc, 2000. Citado na página 13.
- VIRTANEN, P. et al. Scipy 1.0: fundamental algorithms for scientific computing in python. *Nature Methods*, v. 17, p. 261 – 272, 2020. Citado na página 39.
- WEINBERG, S. The cosmological constant problem. *Reviews of Modern Physics*, v. 61, n. 1, 1989. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 47.
- WERNECK, L. R. *Aspects of numerical relativity: scalar fields and neutron stars*. Tese (Doutorado) — University of São Paulo, São Paulo, SP, Brazil, 2020. Citado 3 vezes nas páginas 37, 38 e 45.
- WERNECK, L. R. et al. Nrpycritcol & sfollapse1d: an open-source, user-friendly toolkit to study critical phenomena. *Classical and Quantum Gravity*, v. 38, p. 245005, 2021. Citado na página 37.
- ZHANG, C.-Y. et al. Charged scalar gravitational collapse in de sitter spacetime. *Phys. Rev. D*, American Physical Society, v. 93, p. 064036, Mar 2016. Disponível em: <<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.93.064036>>. Citado 3 vezes nas páginas 22, 45 e 47.